

1 a, b を整数とする。3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 1 = 0$ は 3 実解 α, β, γ を持ち、 $0 < \alpha < \beta < \gamma < 3$ で、 α, β, γ のうちどれかは整数である。 a, b を求めよ。

2 放物線 $y = x^2$ 上に、直線 $y = ax + 1$ に関して対称な位置にある異なる点 P, Q が存在するような a の範囲を求めよ。

3 四面体 $OAPQ$ において、 $|OA| = 1$ 、 $OA \perp OP$ 、 $OP \perp OQ$ 、 $OA \perp OQ$ で、 $\angle PAQ = 30^\circ$ である。

- (1) $\triangle APQ$ の面積 S を求めよ。
- (2) $|OP|$ のとりうる範囲を求めよ。
- (3) 四面体 $OAPQ$ の体積 V の最大値を求めよ。

4 複素数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ は、条件

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \leq r \leq \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

をみたす。

(1) $f(z) = |z + z^3|$ の最大値と最小値、およびそれらを与える複素数 z を求めよ。

(2) $g(z) = |2z + z^3|$ の最大値と最小値、およびそれらを与える複素数 z を求めよ。

5 1 から n までの数字を 1 つずつ書いた n 枚のカードがある。ただし、 $n \geq 2$ とする。

(1) この n 枚のカードから一度に 2 枚選び、大きい方の数字を X とする。
 X の期待値 E_1 を求めよ。

(2) この n 枚のカードから 1 枚選び、その数字を X_1 とする。そのカードをもとに戻し、改めて 1 枚選び、その数字を X_2 とする。 X_1 と X_2 の小さくない方の数字を Y とする。 Y の期待値 E_2 を求めよ。