$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) すべての正の奇数 k は，$m > n \geq 0$ をみたす整数 m，n によって $k = m^2 - n^2$ と表されることを示せ。

(2) 正の偶数 k で，$m > n \geq 0$ をみたす整数 m, n によって $k = m^2 - n^2$ と表されるものをすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 複素数の数列 $\{z_n\}$ は $z_1 = 1$，$z_{n+1} = \sqrt{2}(1+i)z_n^2$（$n = 1, 2, \ldots$）をみたす。

(1) $|z_n|$ を求めよ。

(2) z_n を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 空間内の 2 点 P（$\cos\theta$, $\sin\theta$, 0），Q（$\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, $\sqrt{1 - \sin\theta}$）と原点 O のつくる三角形 OPQ の面積の最大値および最小値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ とする。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 放物線 C と C 上の点 A における C の接線 l に対し，A を通り l に直交する直線を A における C の法線という．

(1) 放物線 $y=x^2$ の法線で，点 $(3,\,0)$ を通るものを求めよ．

(2) $t>0$ とする．放物線 $y=x^2$ の法線であり, 同時に, 放物線 $y=x^2+t$ の接線となるものが存在するような t の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ n は 3 以上の整数とする．数直線上で，座標が 0 の点を O とし，座標が n の点を C とする．$0<a<b<n$ をみたす整数 a，b を無作為に選び，座標が a の点を A，座標が b の点を B とする．線分 OA，AB，BC の長さのうちの最小値を X とする．

(1) $X=2$ である確率を n で表せ．

(2) さらに，n は 3 の倍数とする．X の期待値を n で表せ．