

1 次の条件 (a)、(b) をともにみたす直角三角形を考える。ただし、斜辺の長さを p 、その他の 2 辺の長さを q 、 r とする。

(a) p 、 q 、 r は自然数で、そのうちの少なくとも 2 つは素数である。

(b) $p + q + r = 132$

(1) q 、 r のどちらかは偶数であることを示せ。

(2) p 、 q 、 r の組をすべて求めよ。

2 座標平面上に 1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。ただし、 $\triangle ABC$ の重心は原点の位置にあり、辺 BC は x 軸と平行である。また、頂点 A は y 軸上にあつて y 座標は正であり、頂点 C の x 座標は正である。直線 $y = x$ に関して 3 点 A、B、C と対称な点を、それぞれ A' 、 B' 、 C' とする。

(1) C' の座標を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が重なる部分の面積を求めよ。

3 大きさがそれぞれ 5、3、1 の平面上のベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ に対して、

$$\vec{z} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

とおく。

(1) $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を動かすとき、 $|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\vec{a}$ を固定し、 $\vec{a} \cdot \vec{z} = 20$ をみたすように $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を動かすとき、 $|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。

4 a, b を正の定数とする。関数 $y = x^3 - ax$ のグラフと、点 $(0, 2b^3)$ を通る直線はちょうど 2 点 P, Q を共有している。ただし、 P の x 座標は負、 Q の x 座標は正である。

- (1) 直線 PQ の方程式を a と b で表せ。
- (2) P および Q の座標を a と b で表せ。
- (3) $\angle POQ = 90^\circ$ となる b が存在するような a の値の範囲を求めよ。ただし、 O は原点である。

5 1, 2, 3, 4 が 1 つずつ記された 4 枚のカードがある。これらのカードから 1 枚を抜き出し元に戻すという試行を n 回繰り返す。抜き出した n 個の数の和を X_n とし、積を Y_n とする。

- (1) $X_n \leq n + 3$ となる確率を n で表せ。
- (2) Y_n が 8 で割り切れる確率を n で表せ。