1 m を整数とし，$f(x) = x^3 + 8x^2 + mx + 60$ とする。

(1) 整数 a と，0 ではない整数 b で，$f(a + bi) = 0$ をみたすものが存在するような m をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

(2) (1) で求めたすべての m に対して，方程式 $f(x) = 0$ を解け。

2 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4\,a_n$$

$$b_1 = 3, \quad b_{n+1} = b_n + 2\,a_n$$

$$c_1 = 4, \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{4} + a_n + b_n$$

と順に定める。放物線 $y = a_n x^2 + 2\,b_n x + c_n$ を H_n とする。

(1) H_n は x 軸と 2 点で交わることを示せ。

(2) H_n と x 軸の交点を P_n, Q_n とする。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_kQ_k$ を求めよ。

3 放物線 $y = ax^2 + bx$ $(a > 0)$ を C とする。C 上に異なる 2 点 P, Q をとり，その x 座標をそれぞれ p, q $(0 < p < q)$ とする。

(1) 線分 OQ と C で囲まれた部分の面積が，$\triangle OPQ$ の面積の $\dfrac{3}{2}$ 倍であるとき，p と q の関係を求めよ。ただし，O は原点を表す。

(2) Q を固定して P を動かす。$\triangle OPQ$ の面積が最大となるときの p を q で表せ。また，そのときの $\triangle OPQ$ の面積と，線分 OQ と C で囲まれた部分の面積との比を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ a を定数とし，$f(x) = x^3 - 3ax^2 + a$ とする。$x \leqq 2$ の範囲で $f(x)$ の最大値が 105 となるような a をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 1 が書かれたカードが 1 枚，2 が書かれたカードが 1 枚，$\ldots$，n が書かれたカードが 1 枚の全部で n 枚のカードからなる組がある。この組から 1 枚を抜き出し元にもどす操作を 3 回行う。抜き出したカードに書かれた数を a，b，c とするとき，得点 X を次の規則 (i)，(ii) に従って定める。

(i) a，b，c がすべて異なるとき，X は a，b，c のうちの最大でも最小でもない値とする。

(ii) a，b，c のうちに重複しているものがあるとき，X はその重複した値とする。

$1 \leqq k \leqq n$ をみたす k に対して，$X = k$ となる確率を p_k とする。

(1) p_k を n と k で表せ。

(2) p_k が最大となる k を n で表せ。