

1 直角をはさむ二辺の長さが a 、 b の直角三角形がある．内接円の半径を r とする．

(1) r を a 、 b で表せ．

(2) a 、 b は整数とし、 $r = 5$ とする．このような a 、 b の組をすべて求めよ．

2 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_{2n} = 2a_n - 1, \quad a_{2n+1} = 2a_n + 1$$

をみたす．

(1) $n = 2^m$ のとき、 a_n を求めよ．

(2) $n = 2^m + r$ ($r = 1, 2, \dots, 2^m - 1$) のとき、 a_n を求めよ．

3 a 、 b を正の定数とし、 P 、 Q を、それぞれ関数 $y = \frac{a}{x}$ 、 $y = -\frac{b}{x}$ のグラフ上の点とする． $\triangle POQ$ の面積の最小値を求めよ．さらに、面積が最小となる $\triangle POQ$ で、 $\angle POQ$ が直角になるときの P 、 Q の座標を求めよ．ただし、 O は原点を表す．

4 xyz 空間内の平面 $z = 0$ の上に $x^2 + y^2 = 25$ により定まる円 C があり、平面 $z = 4$ の上に $x = 1$ により定まる y 軸に平行な直線 l がある。

- (1) 点 $P(6, 8, 15)$ から C 上の点への距離の最小値を求めよ。
- (2) C 上の点で、 l 上の点への距離の最小値が 5 であるものをすべて求めよ。

5 1 が書かれたカードが 1 枚、2 が書かれたカードが 1 枚、 $\dots$ 、 n が書かれたカードが 1 枚の全部で n 枚のカードからなる組が 2 組ある。A はそのうちの 1 組をもち、B は別の 1 組をもつ。A と B は、それぞれ無作為に自分のもっている組のうちの 1 枚を取り出す。A が取り出したカードに書かれている数を a とし、B が取り出したカードに書かれている数を b とする。次の規則 (i), (ii) に従って、A と B の得点を定める。

- (i) $a = b$ のとき、A の得点を a^2 とし、B の得点を 0 とする。
- (ii) $a \neq b$ のとき、A の得点を 0 とし、B の得点を $|a - b|$ とする。

- (1) A の得点の期待値を求めよ。
- (2) B の得点の期待値を求めよ。