

1

$$\alpha = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}, \quad \beta = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$$

とおく。すべての自然数 n に対して、 $\alpha^n + \beta^n$ は自然数であることを示せ。

2

a, b を $0 < a < b$ とする実数とし、 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+b)x^2 + abx$ とおく。

(1) $f(a) < f\left(\frac{3}{2}(a+b)\right)$ を示せ。

(2) 区間 $a \leq x \leq \frac{3}{2}(a+b)$ における $|f(x)|$ の最小値・最大値を求めよ。

3

s, t を実数とし、 $|s| \neq 1$ とする。点 $A(-1, 0)$ と $P(s, t)$ を通る直線と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点のうち A と異なるものを C とする。また、点 $B(1, 0)$ と $P(s, t)$ を通る直線と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点のうち B と異なるものを D とする。 $\overline{AC} \cdot \overline{AP} + \overline{BD} \cdot \overline{BP}$ の値を s, t の式で表せ。

4 正六角形の 6 個の頂点を時計回りに A, B, C, D, E, F とする。サイコロを投げて出た目の数 X により、この六角形の頂点上にある点 P を次の規則に従って移動させる。

- (a) X が偶数のとき、 P を時計回りに隣の頂点へ移す操作を X 回くり返す。
- (b) X が奇数のとき、 P を時計回りに隣の頂点へ移す操作を 3 回くり返す。

最初 P は A にある。この試行を n 回くり返したとき、 P が A, B, C, D, E, F にある確率をそれぞれ $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ とする。また、 $s_n = a_n + b_n$ 、 $t_n = b_n + e_n$ とする。

- (1) すべての n に対して $b_n = c_n = e_n = f_n$ であることを示せ。
- (2) $s_n - t_n$ を n の式で表せ。
- (3) s_n を n の式で表せ。

5 次の [I], [II] のいずれか一方を選択して解答せよ。なお、解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

[I] 平面上の点 (a, b) から放物線 $y = -x^2 + 2$ に引いた接線がちょうど 2 つ存在し、それらの接線のなす角が 45° である。 a, b の値を求めよ。

[II] $0 \leq x \leq 1$ に対して、不等式

$$a + bx \leq \frac{e^{2x} + e^{-x}}{2} \leq a + cx$$

がつねに成立している。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) b の最大値と c の最小値をそれぞれ求めよ。