1 a を正の奇数とする．次の (i), (ii) をみたす整数 b, c の組がちょうど 3 つ存在するような最小の a を求めよ．

(i) a, b, c は直角三角形の 3 辺の長さである．

(ii) $a < b < c$

2 平面ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ は次の (i), (ii) をみたす．

(i) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = -\sqrt{3}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$

(ii) $|\overrightarrow{a}| = \left|\overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{c}| = 1$

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行でないことを示せ．

(2) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ の値を求めよ．

3 $a > 0$ とする．xy 平面上に，4 点 $(-8\,,\,0)$，$(-8\,,\,1)$，$(-9\,,\,1)$，$(-9\,,\,0)$ を頂点にもつ正方形 P と，4 点 $(0\,,\,-8)$，$(1\,,\,-8)$，$(1\,,\,-9)$，$(0\,,\,-9)$ を頂点にもつ正方形 Q がある．正方形 P は秒速 $\dfrac{1}{a}$ で x 軸の正の方向に移動を始め，同時に正方形 Q は秒速 $\dfrac{1}{a^2}$ で y 軸の正の方向に移動を始める．

(1) 移動する 2 つの正方形 P, Q が決して共有点をもたないような a の条件を求めよ．

(2) 移動する 2 つの正方形 P, Q が，時刻 t_1 から時刻 t_2 まで共有点をもつとき $g(a) = t_2 - t_1$ とし，共有点をもたないときは $g(a) = 0$ として，関数 $g(a)$ を定める．定積分

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} g(a)\,da$$

の値を求めよ．

4 赤い本が 2 冊，青い本が n 冊ある．この $n+2$ 冊の本を無作為に 1 冊ずつ，本棚に左から並べていく．2 冊の赤い本の間にある青い本の冊数を X とする．

(1) $k=0,1,2,\ldots,n$ に対して $X=k$ となる確率を求めよ．

(2) X の期待値を求めよ．

5 次の [I], [II] のいずれか一方を選択して解答せよ。なお、解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

[I] p, q を $p<q$ をみたす実数とする．実数 a, b に対して，2 次方程式

$$x^2+ax+b=0$$

のすべての解は p 以上 q 以下の実数である．このような点 (a,b) 全体からなる領域を ab 平面に図示せよ．また，その領域の面積を p, q の式で表せ．

[II] 放物線 $y=x^2$ のグラフ上に 3 点 A, B, C があり，$\triangle$ ABC は $\angle$ B を直角とする直角二等辺三角形である．A, B, C の x 座標をそれぞれ a, b, c とするとき，$a<b<c$ をみたす．また，直線 BC の傾きを m とする．

(1) a, b, c をそれぞれ m の分数式で表せ．

(2) $c-b$ を最小にする m の値を求めよ．