

1

- (1) 自然数 x, y は, $1 < x < y$ および

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{5}{3}$$

をみたす。 x, y の組をすべて求めよ。

- (2) 自然数 x, y, z は, $1 < x < y < z$ および

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5}$$

をみたす。 x, y, z の組をすべて求めよ。

2

点 O を中心とする半径 r の円周上に, 2 点 A, B を $\angle AOB < \frac{\pi}{2}$ となるようにとり $\theta = \angle AOB$ とおく。この円周上に点 C を, 線分 OC が線分 AB と交わるようにとり, 線分 AB 上に点 D をとる。また, 点 P は線分 OA 上を, 点 Q は線分 OB 上を, それぞれ動くとする。

- (1) $CP + PQ + QC$ の最小値を r と θ で表せ。
 (2) $a = OD$ とおく。 $DP + PQ + QD$ の最小値を a と θ で表せ。
 (3) さらに, 点 D が線分 AB 上を動くときの $DP + PQ + QD$ の最小値を r と θ で表せ。

3

xy 平面上に放物線 $C : y = -3x^2 + 3$ と 2 点 $A(1, 0), P(0, 3p)$ がある。線分 AP と C は, A とは異なる点 Q を共有している。

- (1) 定数 p の存在する範囲を求めよ。
 (2) S_1 を, C と線分 AQ で囲まれた領域とし, S_2 を, C , 線分 QP , および y 軸とで囲まれた領域とする。 S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ。

4 a, b, c を正の定数とする。空間内に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある。

- (1) 辺 AB を底辺とするとき、 $\triangle ABC$ の高さを a, b, c で表せ。
- (2) $\triangle ABC$, $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ の面積をそれぞれ S, S_1, S_2, S_3 とする。ただし、 O は原点である。このとき、不等式

$$\sqrt{3}S \geq S_1 + S_2 + S_3$$

が成り立つことを示せ。

- (3) (2) の不等式において等号が成り立つための条件を求めよ。

5 A と B の 2 人が、1 個のサイコロを次の手順により投げ合う。

- 1 回めは A が投げる。
- 1, 2, 3 の目が出たら、次の回には同じ人が投げる。
- 4, 5 の目が出たら、次の回には別の人が投げる。
- 6 の目が出たら、投げた人を勝ちとしそれ以降は投げない。

- (1) n 回目に A がサイコロを投げる確率 a_n を求めよ。
- (2) ちょうど n 回目のサイコロ投げで A が勝つ確率 p_n を求めよ。
- (3) n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n を求めよ。