

1 1つの角が 120° の三角形がある。この三角形の3辺の長さ x, y, z は $x < y < z$ を満たす整数である。

- (1) $x + y - z = 2$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。
- (2) $x + y - z = 3$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。
- (3) a, b を0以上の整数とする。 $x + y - z = 2a^3b$ を満たす x, y, z の組の個数を a と b の式で表せ。

2 a を0以上の定数とする。関数 $y = x^3 - 3a^2x$ のグラフと方程式 $|x| + |y| = 2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。

3 定数 a, b, c, d に対して、平面上の点 (p, q) を点 $(ap + bq, cp + dq)$ に移す操作を考える。ただし、 $(a, b, c, d) \neq (1, 0, 0, 1)$ である。 k を0でない定数とする。放物線 $C: y = x^2 - x + k$ 上のすべての点は、この操作によって C 上に移る。

- (1) a, b, c, d を求めよ。
- (2) C 上の点 A における C の接線と、点 A をこの操作によって移した点 A' における C の接線は、原点で直交する。このときの k の値および点 A の座標をすべて求めよ。

4 xyz 空間内の平面 $z = 2$ 上に点 P があり, 平面 $z = 1$ 上に点 Q がある。
直線 PQ と xy 平面の交点を R とする。

- (1) $P(0, 0, 2)$ とする。点 Q が平面 $z = 1$ 上で点 $(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, 点 R の軌跡の方程式を求めよ。
- (2) 平面 $z = 1$ 上に 4 点 $A(1, 1, 1)$, $B(1, -1, 1)$, $C(-1, -1, 1)$, $D(-1, 1, 1)$ をとる。点 P が平面 $z = 2$ 上で点 $(0, 0, 2)$ を中心とする半径 1 の円周上を動き, 点 Q が正方形 $ABCD$ の周上を動くとき, 点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し, その面積を求めよ。

5 最初に 1 の目が上面にあるようにサイコロが置かれている。その後, 4 つの側面から 1 つの面を無作為に選び, その面が上面になるように置き直す操作を n 回繰り返す。なお, サイコロの向かい合う面の目の数の和は 7 である。

- (1) 最後に 1 の目が上面にある確率を求めよ。
- (2) 最後に上面にある目の数の期待値を求めよ。