

1 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

$$\log_2(4 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta - 4), \quad \log_2(-4 \cos^3 \theta + 3 \cos \theta + 1)$$

がともに整数となるような θ の値をすべて求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ を次の規則により定める。

(i) $a_1 = 0, a_2 = 1$

(ii) $n \geq 2$ とする。 $k = a_n$ とおくと、 $a_{n-k} = a_n$ が成り立つならば

$$a_{n+1} = a_n + 1$$

とし、 $a_{n-k} \neq a_n$ ならば $a_{n+1} = a_n$ とする。

(1) 0 以上の整数 k に対して、 $a_n = k$ を満たす最小の n および最大の n をそれぞれ k の式で表せ。

(2)

$$\sum_{n=1}^m a_n \geq 2012$$

を満たす最小の m を求めよ。

3 四面体 OABC は、 $OA = OB = OC = 1$ であり、 $0^\circ < \theta < 120^\circ$ を満たす θ に対して $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \theta$ である。

(1) 四面体 OABC の体積を θ の式で表せ。

(2) 四面体 OABC の体積を最大にする θ の値を求めよ。

4 n を正の整数とする. 1 から $2n$ までの整数がそれぞれ 1 つずつ書かれた $2n$ 枚のカードがある. この $2n$ 枚のカードから 1 枚を抜き出し, 抜き出したカードに書かれた数を a とする. 次に, 残りの $2n - 1$ 枚のカードからもう 1 枚を抜き出し, 抜き出したカードに書かれた数を b とする. 直線 $\sqrt{2}ax + \sqrt{b}y = \sqrt{3ab}$ を l とし, 原点を中心とする半径 1 の円を C とする.

- (1) 直線 l と円 C が 1 点のみを共有する確率を n の式で表せ.
- (2) 直線 l と円 C が共有点をもたない確率を n の式で表せ.

5 次の [I], [II] のいずれか一方を選択して解答せよ. なお, 解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること.

[I] a を正の定数とし, 放物線 $y = ax^2$ と直線 $y = 1$ で囲まれる領域を D とする. y 軸上の点を中心とし, 領域 D に含まれる円の半径の最大値を求めよ.

[II] 次の (1), (2) の不等式が成り立つことを証明せよ.

(1) $0 \leq x \leq 1$ のとき,

$$1 - \frac{x}{2} \leq e^{-\frac{x}{2}} \leq 1 - \frac{x}{3}$$

(2)

$$\frac{5}{3} < \int_{-1}^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \frac{16}{9}$$