$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) 正の実数 x、y、z が $x^2 = y^2 + z$ を満たすとき、$y < x < y + \dfrac{z}{2y}$ が成り立つことを示せ。

(2) $x^2 = y^2 + 8\sqrt{2y-1}$ を満たす正の整数 x、y の組をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ xy 平面上に、曲線 $C_1 : y = \dfrac{x^2}{8} - 2$ と、原点を中心とする半径 1 の円 C_2 がある。

(1) t を実数とする。曲線 C_1 上の点 $\left(t, \dfrac{t^2}{8} - 2\right)$ から円 C_2 へ引いた 2 本の接線が、それぞれ点 P_1, P_2 で C_2 と接する。P_1, P_2 を通る直線 l の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた直線 l は、t の値にかかわらず、ある円に接することを示し、その円の方程式を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面上に、原点 O、点 A$(1\,,0)$、点 B$(0\,,1)$ を頂点とする△ OAB がある。辺 OA 上の動点 P と、辺 OB 上の動点 Q は、線分 PQ が△ OAB の面積を 2 等分するように動く。線分 PQ が通る点の全体からなる領域を図示せよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 袋の中に、青玉、黄玉、赤玉が 1 個ずつ合計 3 個の玉が入っている。袋から無作為に 1 個の玉を取り出し、その玉を袋の中に戻す操作を繰り返す。

(1) この操作を n 回繰り返したとき、青玉が奇数回取り出される確率 p_n を求めよ。

(2) 取り出した玉の色により、青玉のときは階段を 2 段上がり、黄玉のときは階段を 1 段上がる。赤玉のときは動かない。この操作を n 回繰り返したとき、合計で階段を 3 段上がった位置にいる確率 q_n を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の [I], [II] のいずれか一方を選択して解答せよ。なお、解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

[I] a を実数とする。xy 平面上の曲線 $y = x^3 + 3ax^2 - 4a^3$ の接線で点 $(a\,,\,1)$ を通るものが、ちょうど 2 本存在する。a を求めよ。

[II] e^{π} と π^{e} の大小を比較せよ。