1 a を正の定数とし，2 つの曲線 C_1、C_2 を次のように定める。

$$C_1 : y = x^3 - 3x, \quad C_2 : y = x^3 - 3x + a$$

(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線がただ一つ存在することを示せ。

(2) C_1 と C_2 の両方に接する直線を l とする。l と C_1 の 2 つの共有点の x 座標の差が 1 となるような a の値を求めよ。

2 四面体 OABC は

$$OA = BC = 5, \quad OB = 2\sqrt{5}, \quad AC = \sqrt{5}, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 10$$

をみたす。四面体 OABC の体積の最大値を求めよ。

3 $(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13)^{10}$ の 10 進法での桁数を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 一辺の長さが 2 の正方形を底面とし、高さが 1 の直方体を K とする。点 A と点 B を、K の同じ面に属さない 2 頂点とする。直線 AB を含む平面で K を切ったときの断面積の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の [I], [II] のいずれか一方を選択して解答せよ。なお、解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

[I] 0 以上の整数 n について

$$a_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$$

とする。

(1) a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ。

(2) $\dfrac{8}{3} < e < \dfrac{30}{11}$ が成り立つことを示せ。

[II] n を 7 以上の整数とする。1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 個の球を袋に入れる。袋から無作為に取り出した 4 個の球の番号がすべて奇数である確率を p_n とする。

(1) p_n を n を用いて表せ。

(2) $p_n < 0.05$ となる n をすべて求めよ。