

- 1** n を 2 以上の整数とする。 n 以下の正の整数のうち、 n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す。たとえば

$$E(2) = 1, \quad E(3) = 2, \quad E(4) = 2, \quad \dots, \quad E(10) = 4,$$

である。

- (1) $E(1024)$ を求めよ。
- (2) $E(2015)$ を求めよ。
- (3) m を正の整数とし、 p と q を異なる素数とする。 $n = p^m q^m$ のとき

$$\frac{E(n)}{n} \geq \frac{1}{3}$$

が成り立つことを示せ。

- 2** 座標平面上の原点を O とする。点 $A(a,0)$ 、点 $B(0,b)$ および点 C が

$$OC = 1, \quad AB = BC = CA$$

を満たしながら動く。

- (1) $s = a^2 + b^2$, $t = ab$ とする。 s と t の関係を表す等式を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ。

- 3** n を 4 以上の整数とする。正 n 角形の 2 つの頂点を無作為に選び、それらを通る直線を l とする。さらに、残りの $n - 2$ 個の頂点から 2 つの頂点を無作為に選び、それらを通る直線を m とする。直線 l と m が平行になる確率を求めよ。

4 xyz 空間において、原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を点 P が動き、点 $(0, 0, \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径 1 の円周上を点 Q が動く。

- (1) 線分 PQ の長さの最小値と、そのときの点 P, Q の座標を求めよ。
- (2) 線分 PQ の長さの最大値と、そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

5 次の [I], [II] のいずれか一方を選択して解答せよ。なお、解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

[I] 数列 $\{a_k\}$ を $a_k = k + \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)$ で定める。 n を正の整数とする。

- (1) $\sum_{k=1}^{12n} a_k$ を求めよ。
- (2) $\sum_{k=1}^{12n} a_k^2$ を求めよ。

[II] a, b, c は異なる 3 つの正の整数とする。次のデータは 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 10 人の得点をまとめたものである。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
科目 X の得点	a	c	a	b	b	a	c	b	c
科目 Y の得点	a	b	b	b	a	b	a	b	a

科目 X の得点の平均値と科目 Y の得点の平均値とは等しいとする。

- (1) 科目 X の得点の分散を s_X^2 , 科目 Y の得点の分散を s_Y^2 とする。
 $\frac{s_X^2}{s_Y^2}$ を求めよ。
- (2) 科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数を、四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。
- (3) 科目 X の得点の中央値が 65, 科目 Y の得点の標準偏差が 11 であるとき、 a, b, c の組を求めよ。