

1 x, y, z を整数とする。

(1) $y \neq 0$ かつ $yz \neq -1$ のとき, $\left|y + \frac{1}{z}\right|$ の最小値を求めよ。

(2)

$$\frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} = \frac{9}{11}$$

を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

2 p, q を実数とする. 2 次関数 $f(x) = x^2 - px + 108q$ のグラフ $y = f(x)$ が直線 $12x + 4y + 9 = 0$ と接している. 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの整数解を持つならば, q は 0 以上の整数であることを証明せよ.

3 A, B の 2 人があるゲームで対戦する. 1 回のゲームで A が勝つ確率は $\frac{1}{2} + a$ で, B が勝つ確率は $\frac{1}{2} - a$ である. ただし $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ である. 先に 3 ゲーム勝った方を優勝とする. 優勝者が決まるまでにちょうど 3 回, 4 回, 5 回のゲームが行われる確率をそれぞれ p_3, p_4, p_5 とする. 以下, $b = a^2$ とする.

(1) p_3, p_4, p_5 をそれぞれ b を用いて表せ.

(2) $p_3 > p_4$ となる b の範囲を求めよ.

(3) $p_4 > p_5$ となる b の範囲を求めよ.

- 4 $0 < a < 1$ とする. xy 平面において, 点 $(a, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C , 点 $(-a, 0)$ を中心とする半径 1 の円を D とする. 次の条件を満たす直線 l の方程式を求めよ.

[条件] 直線 l は, 円 C と 2 点 P, Q で交わり, 円 D と 2 点 R, S で交わる. さらに線分 PQ の中点は円 D 上にあり, 線分 RS の中点は円 C 上にある.

- 5 次の [I], [II] のいずれか一方を選択して解答せよ. なお, 解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること.

[I] a を正の定数とし, $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^3 - \frac{a^x}{4}x$ とする. 曲線 $y = f(x)$ 上に点 $A(a, f(a))$ と点 $P(s, f(s))$ ($0 < s < a$) があり, 曲線 $y = g(x)$ 上に点 $B(a, g(a))$ と点 $Q(t, g(t))$ ($0 < t < a$) がある. 原点を O とする.

(1) $\triangle OAP$ の面積を最大にする s および $\triangle OBQ$ の面積を最大にする t を, それぞれ a を用いて表せ.

(2) (1) で求めた s, t に対して, $\triangle OAP$ と $\triangle OBQ$ が原点 O 以外に共有点をもたないような a の範囲を求めよ.

[II] a, b を異なる正の実数とする. 不等式

$$\left(\frac{1+a}{1+b} \right)^{\frac{1}{a-b}} < e$$

を示せ.