

1 $6 \cdot 3^{3x} + 1 = 7 \cdot 5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ。

2 θ を実数とし、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \cos \theta, \quad a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。すべての n について $a_n = \cos(n-1)\theta$ が成り立つとき、 $\cos \theta$ を求めよ。

3 硬貨が 2 枚ある。最初は 2 枚とも表の状態で置かれている。次の操作を n 回行ったあと、硬貨が 2 枚とも裏になっている確率を求めよ。

【操作】2 枚とも表、または 2 枚とも裏のときには、2 枚の硬貨両方を投げる。表と裏が 1 枚ずつのときには、表になっている硬貨だけを投げる。

- 4 a を実数とし、 $f(x) = x^3 - 3ax$ とする。区間 $-1 \leq x \leq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。 M の最小値とそのときの a の値を求めよ。

- 5 次の [I], [II] のいずれか一方を選択して解答せよ。なお、解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

[I]

平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は零ベクトルではなく、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度は 60° である。このとき

$$r = \frac{|\vec{a} + 2\vec{b}|}{2a + b}$$

のとりうる値の範囲を求めよ。

[II]

x は 0 以上の整数である。次の表は 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 5 人の得点をまとめたものである。

	①	②	③	④	⑤
科目 X の得点	x	6	4	7	4
科目 Y の得点	9	7	5	10	9

- (1) $2n$ 個の実数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ について、

$$a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k, \quad b = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k$$

とすると、

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a)(b_k - b) = \sum_{k=1}^n a_k b_k - nab$$

が成り立つことを示せ。

- (2) 科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数 r_{XY} を x で表せ。
- (3) x の値を 2 増やして r_{XY} を計算しても値は同じであった。このとき、 r_{XY} の値を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。