

1 実数 a, b は $a \geq 1, b \geq 1, a + b = 9$ を満たす。

(1) $\log_3 a + \log_3 b$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\log_2 a + \log_4 b$ の最大値と最小値を求めよ。

2 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 = yz + 7 \\ y^2 = zx + 7 \\ z^2 = xy + 7 \end{cases}$$

を満たす整数の組 (x, y, z) で $x \leq y \leq z$ となるものを求めよ。

3 $P(0) = 1, P(x+1) - P(x) = 2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ。

4 正の実数 a, b, c は $a + b + c = 1$ を満たす。連立不等式

$$|ax + by| \leq 1, \quad |cz - by| \leq 1$$

の表す xy 平面の領域を D とする。 D の面積の最小値を求めよ。

5 xy 平面上の直線 $x = y + 1$ を k , yz 平面上の直線 $y = z + 1$ を l , xz 平面上の直線 $z = x + 1$ を m とする。直線 k 上に点 $P_1(1, 0, 0)$ をとる。 l 上の点 P_2 を $P_1P_2 \perp l$ となるように定め、 m 上の点 P_3 を $P_2P_3 \perp m$ となるように定め、 k 上の点 P_4 を $P_3P_4 \perp k$ となるように定める。以下、同様の手順で $l, m, k, l, m, k, \dots$ 上の点 $P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, \dots$ を定める。

(1) 点 P_2, P_3 の座標を求めよ。

(2) 線分 P_nP_{n+1} の長さを n を用いて表せ。