

- 1** 実数 x, y, k は $x^2 + y^2 = 3x + 4y = kx - 4$ を満たす. k の取りうる値の範囲を求めよ.

- 2** 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{2}{1 + a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次のことを示せ。

- (1) n が偶数のとき $1 < a_{n+2} < a_n$
- (2) n が奇数のとき $a_n < a_{n+2} < 1$

- 3** AとBの二人が次のゲームを行う.

「1 から 18 までの数字が一つずつ書かれた 18 個の玉が入った袋がある. 袋から玉を 1 個取り出し, 玉の数字が 3 の倍数ならば A に 2 点を与え, それ以外ならば B に 1 点を与える. 取り出した玉は袋に戻さずに, この試行を繰り返す.」

- (1) 2 点先取した方が勝ちというルールするとき, A が勝つ確率を求めよ.
- (2) 12 点先取した方が勝ちというルールするとき, A が勝つ確率を求めよ.

4 m, n を 1 以上 10 以下の整数とする。3 点 $O(0, 0)$, $A(3, 4)$, $B(m, n)$ は同一直線上にないとする。

(1) $\triangle OAB$ の面積を最小にする $B(m, n)$ を求めよ。

(2) $\angle AOB$ を最小にする $B(m, n)$ を求めよ。

5 次の [I], [II] のいずれか一方を選択して解答せよ。なお、解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

[I] 以下の問いに答えよ。

(1) 実数 r は $0 < r < 1$ を満たす。 $x > 0$ のとき、 $x^r - 1 \leq r(x - 1)$

の大小を比較せよ。

(2) 実数 p, q は $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす。 $a > 0, b > 0$

のとき、 $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}}$ と $\frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ の大小を比較せよ。

[II] $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。座標空間に 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(\cos \theta, \cos 2\theta, \cos 3\theta)$,

$B(\sin \theta, \sin 2\theta, \sin 3\theta)$, $C(\sin \theta, -\sin 2\theta, \sin \theta)$ がある。

(1) $\angle AOC$ と $\angle BOC$ は、 θ によらず一定であることを示せ。

(2) $\angle AOB=90^\circ$ のとき、四面体 $OABC$ の体積を求めよ。