$\boxed{\mathbf{1}}$ p を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

により定める。数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 原点を O とする座標平面上の点 Q は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ の部分を動く。点 Q と点 A(2, 2) に対して

$$\overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ})\overrightarrow{OQ}$$

を満たす点 P の軌跡を求め，図示せよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x) = x^3 - 3x + 2$ とする。また，α は 1 より大きい実数とする。曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\, f(\alpha))$ における接線と x 軸の交点を Q とする。点 Q を通る C の接線の中で傾きが最小のものを ℓ とする。

(1) ℓ と C の接点の x 座標を α の式で表せ。

(2) $\alpha = 2$ とする。ℓ と C で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 原点を O とする座標平面上に，点 $(2, 0)$ を中心とする半径 2 の円 C_1 と，点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある。点 P を中心とする円 C_3 は C_1 に内接し，かつ C_2 に外接する。ただし，P は x 軸上にないものとする。P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸の交点を Q とするとき，三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 左下の図のような縦 3 列横 3 列の 9 個のマスがある。異なる 3 個のマスを選び，それぞれに 1 枚ずつコインを置く。マスの選び方は，どれも同様に確からしいものとする。縦と横の各列について，点数を次のように定める。

- その列に置かれているコインが 1 枚以下のとき，0 点
- その列に置かれているコインがちょうど 2 枚のとき，1 点
- その列に置かれているコインが 3 枚のとき，3 点

縦と横のすべての列の点数の合計を S とする。たとえば，右下の図のようにコインが置かれている場合，縦の 1 列目と横の 2 列目の点数が 1 点，他の列の点数が 0 点であるから，S $=$ 2 となる。

(1) S $=$ 3 となる確率を求めよ。

(2) S $=$ 1 となる確率を求めよ。

(3) S $=$ 2 となる確率を求めよ。