$\boxed{\mathbf{1}}$

$\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{2023}$を満たす正の整数の組 (m,n) の個数を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ x を正の実数とする。空間内に互いに外接しあう 3 つの球 S_1, S_2, S_3 があり，それぞれの半径は $1, x, x^2$ である。また，これらは同一の平面 P にそれぞれ点 A_1, A_2, A_3 で接している。$\angle A_1A_2A_3$ の大きさを θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき，θ のとり得る値の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面上に相異なる 4 点 A, B, C, D がある。動く点 P が，時刻 n において，これらのいずれかの点にあるとき，時刻 $n+1$ にどの点にあるかを定める確率が下の表で与えられている。たとえば，P が時刻 n に B にあるとき，時刻 $n+1$ に D にある確率は $\dfrac{1}{2}$ である。

$n \backslash n+1$	A	B	C	D
A	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
D	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

(1) 時刻 1 に P が C にあるとき，時刻 3 に P が B にある確率を求めよ。

(2) 時刻 1 に P が A にあるとき，時刻 n に P が B にある確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ a を実数とする。曲線 $C : y = \frac{1}{3}x^3 - ax$ 上の点 P における C の接線 ℓ が，P と異なる点 Q において C と交わり，かつ Q における C の接線が ℓ と直交する。このような P が存在しうる a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の [I]，[II] のいずれか一方を選択して解答せよ。なお，解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

[I]

数列 $\{a_n\}$ がすべての正の整数 n について次の条件を満たしている。

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2 a_k = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(2n+1)}{60}$$

$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[II]

以下の問いに答えよ。

(1) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ を求めよ。

(2) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ に対し，$x \geqq \tan x - \dfrac{\tan^3 x}{3}$ を示せ。

(3) $\pi > 3.1$ を示せ。