$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) 次の不等式の表す領域 D を図示せよ。

$$|x| \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+3$$

(2) 点 A を $\left(-\dfrac{7}{2}, 0\right)$ とし，点 B を直線 AB が $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ に接するような領域 D の点とする。点 P が D を動くとき三角形 ABP の面積の最大値を求めよ。

(3) 領域 D の点 (x, y) について $\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}$ のとり得る値の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を自然数とし，正 $4n$ 角形 $P_0 \cdots P_{4n-1}$ を考える。

(1) 辺 P_0P_1 と辺 P_kP_{k+1} $(1 \leqq k \leqq 2n-1)$ を延長した直線の交点を Q_k とする。このとき，$\angle P_0Q_kP_{k+1}$ の大きさを求めよ。

(2) 3 辺 P_0P_1，P_kP_{k+1}，P_lP_{l+1} $(k<l)$ を延長したとき，正 $4n$ 角形 $P_0 \cdots P_{4n-1}$ を含む鋭角三角形ができるような k と l の組は何通りあるか。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 空間内の 4 点 $O(0,0,0)$, $A(-1,1,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,1)$ をとる。

(1) 直線 OA 上の点 H をとって CH と OA が垂直であるようにする。H の座標を求めよ。$\angle CHC' = \theta$ として $\cos\theta$ の値を求めよ。ただし $C' = (0,1,0)$ とする。

(2) 直線 OA 上の点 P と直線 BC 上の点 Q との距離 PQ が最小となる P, Q の座標を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $Ae^x - x = 0$ が $0 < x < 3$ の範囲で異なる 2 つの解をもつための実数 A の範囲を求めよ．ただし $e = 2.71\cdots$ は自然対数の底である．

(2) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t dt$$

の値を求めよ．

(3) $\log f(x) = x - 3 + 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t dt$，$f(0) < 1$ をみたす関数 $f(x)$ が 2 つ存在することを示せ．ただし，log は自然対数とする．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 正の数 t，実数 p，q に対して関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ は，条件

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f(t) = p, \quad f'(t) = q \quad \cdots\cdots(*)$$

をみたすとする．このとき，c, d を求め，a, b を t, p, q で表せ．

(2) 上の条件 (*) をみたす $f(x)$ について，3 つの不等式 $a \leqq 0, b \leqq 0, p \geq 0$ を同時にみたすような p, q によって定まる点 (p, q) のなす領域を座標平面上に図示し，その面積 S を t を用いて表せ．

(3) t が $t > 0$ なる範囲を動くとき，S の値が最小となる t の値と S の最小値を求めよ．