

1 実数 x, y, z は $x \leq y \leq z \leq 1$ かつ $4x + 3y + 2z = 1$ をみたすとする。

(1) x の最大値と y の最小値を求めよ。

(2) $3x - y + z$ の値の範囲を求めよ。

2 空間内に、3点 $A_0(1, 0, 0)$, $A_1(1, 1, 0)$, $A_2(1, 0, 1)$ を通る平面 α と、3点 $B_0(2, 0, 0)$, $B_1(2, 1, 0)$, $B_2\left(\frac{5}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る平面 β を考える。

(1) 空間の基本ベクトルを $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ とおくとき、ベクトル $\overrightarrow{OA_0}$, $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, $\overrightarrow{OB_0}$, $\overrightarrow{B_0B_1}$, $\overrightarrow{B_0B_2}$ を $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ で表せ。ただし、 O は空間の原点を表す。

(2) 原点 O と α 上の点 P を通る直線が β 上の点 P' も通っているとする。

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_0} + a\overrightarrow{A_0A_1} + b\overrightarrow{A_0A_2}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OB_0} + p\overrightarrow{B_0B_1} + q\overrightarrow{B_0B_2}$$

とおくとき、 a, b を p, q で表せ。

(3) 点 P が α 上の点 A_0 を中心とする半径 1 の円 C の円周上を動くとき、点 P' が動いてできる図形 C' の方程式を p, q で表し、 C' が楕円であることを示せ。

3 y 軸上の 2 点 $A(0,1), B(0,2)$ と x 軸上の正の部分動く点 $P(a,0)$ を考える。 $\theta = \angle APB$ とおく。

- (1) $\cos \theta$ を a で表せ。
- (2) θ が最大になる a を求めよ。

4

- (1) 整数 m, n に対して積分 $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ を求めよ。
- (2) 自然数 n に対して積分 $J_n = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \cos kx \right)^2 dx$ を求めよ。

5 1 つのさいころを投げ続けて、同じ目が 2 回連続して出たら終了するものとする。

- (1) 4 回目以内 (4 回目も含む) に終了する確率を求めよ。
- (2) r 回目以内 (r 回目も含む) に終了する確率を求めよ。ただし、 $r \geq 2$ とする。