

1 a を実数とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = a(\sin x + \cos x) - \sin x \cos x$$

によって定義する。ただし、 x は実数全体を動くとする。

(1) $t = \sin x + \cos x$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ の最大値が 3 となるときの a の値を求めよ。

2 実数 a, b , n は $0 < b < 1 < a$ かつ $n \geq 2$ をみたすとし

$$f(a) = \int_1^a x^{-n} dx, \quad g(b) = \int_b^1 x^{-n} dx$$

とおく。

(1) $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{g(b)} < 1$ となる n の範囲を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1 + \frac{1}{n})}{g(1 - \frac{1}{n})}$ を求めよ。

3 $0 \leq x \leq 2\pi$ とする. このとき, 関数

$$f(x) = \int_0^x e^t \cos t \, dt$$

の最大値をとる x とその最大値を求めよ. ただし, e は自然対数の底とする.

4 一辺の長さが 1 の正三角形 ABC を底面とする四面体 $OABC$ を考える.
ただし, $OA = OB = OC = a$ であり, $a \geq 1$ とする. 頂点 O から三角形 ABC におろした垂線の足を H とする.

- (1) 線分 AH の長さを求めよ.
- (2) a を用いて線分 OH の長さを表せ.
- (3) 四面体 $OABC$ が球 S に内接しているとする. この球 S の半径 r を a を用いて表せ.