

1 k を実数とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + k(\sqrt{3} \sin x + \cos x)$$

とする。

- (1) $t = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ とおくとき、 $f(x)$ を t の 2 次式で表せ。
- (2) $k = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、 $0 < x < \pi$ の範囲で方程式 $f(x) = 0$ の解を求めよ。
- (3) $0 < x < \pi$ の範囲で方程式 $f(x) = 0$ は任意の実数 k に対して解をもつことを示せ。

2 $y = f(x)$ を正の値をとる微分可能な関数で $f'(x) > 0$ とする。

- (1) $h > 0$ とする。 xy 平面上の 2 点 $P(a, f(a))$, $Q(a+h, f(a+h))$ を結ぶ線分を x 軸のまわりに 1 回転させる。そうして得られた円錐の側面の一部の面積 $S(h)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{S(h)}{h}$ を求めよ。

3 xyz 空間において, 不等式

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 1 \geq 0$$

を表す立体を考える。

- (1) この立体を平面 $z = t$ で切ったときの断面を xy 平面に図示し, この断面の面積 $S(t)$ を求めよ。
- (2) この立体の体積を求めよ。

4 実数 a, b, c, d を定数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の定める座標平面上の点の移動を考える。

- (1) 実数 α, β, γ を定数とする。実数 t が動くとき, 点 $(\alpha t + \beta, t + \gamma)$ が A による移動で移される点の軌跡は, ある 1 点か, またはある 1 つの直線になることを示せ。
- (2) 直線 $x = 1$ 上の異なる 2 点 P, Q が, A による移動で原点を通らない直線上の異なる 2 点に移るならば, A は逆行列をもつことを示せ。