

1 a を正の実数とし、2つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$

$$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$$

を考える。

- (1) C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) 2つの放物線 C_1, C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - A + E = O$ を満たすとき、以下の問いに答えよ。ただし、 E は単位行列、 O は零行列である。

- (1) A は逆行列をもつことを示せ。
- (2) $a + d$ と $ad - bc$ を求めよ。
- (3) $b > 0, A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ のとき、 A を求めよ。

3 正の実数 r と $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対して $a_0 = r \cos \theta, \quad b_0 = r$ とおく。 a_n, b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ を θ で表せ。
- (2) $\frac{a_n}{b_n}$ を n と θ で表せ。
- (3) $\theta \neq 0$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{r \sin \theta}{\theta}$$

を示せ。

4 $0 \leq x \leq 1$ に対して

$$f(x) = \int_0^1 e^{-|t-x|} t(1-t) dt$$

と定める。ただし、 $e = 2.718 \dots$ は自然対数の底である。

- (1) 不定積分 $I_1 = \int t e^t dt$, $I_2 = \int t^2 e^t dt$ を求めよ。
- (2) $f(x)$ を x の指数関数と多項式を用いて表せ。
- (3) $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で極大となることを示せ。

5 2本の当たりくじを含む102本のくじを、1回に1本ずつ、くじがなくなるまで引き続けることにする。

- (1) n 回目に1本目の当たりくじが出る確率を求めよ。
- (2) A, B, C の3人が、A, B, C, A, B, C, A, ……の順に、このくじ引きを行うとする。1本目の当たりくじをAが引く確率を求めよ。BとCについても、1本目の当たりくじを引く確率を求めよ。