$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数 x に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す。

例えば，$[2]=2$, $\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$, $[-2.1]=-3$ である。

(1) $n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(2) $[x]^2-[x]-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3) x は (2) で求めた範囲にあるものとする。$x^2-[x]-\dfrac{5}{4}=0$ を満たす x をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，以下の 3 つの条件を考える。

(i) $a+d=ad-bc=0$

(ii) $A^2=0$

(iii) ある自然数 n に対して $A^n=0$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) (i) ならば (ii) であることを示せ。

(2) (ii) ならば $ad-bc=0$ であることを示せ。

(3) (iii) ならば (i) であることを示せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) xy 平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(1,2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2) t が実数全体を動くとき，xyz 空間内の点 $(t+2, t+2, t)$ がつくる直線を ℓ とする。3 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, A'$(2,1,0)$, B'$(1,2,0)$ を通り，中心を $\mathrm{C}(a,b,c)$ とする球面 S が直線 ℓ と共有点をもつとき，a, b, c の満たす条件を求めよ。

4 n を 2 以上の自然数，q と r を自然数とする。1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉，1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を，1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに，小さい番号から順に白玉は q 個ずつ，赤玉は r 個ずつ配分しておく。たとえば，1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し，次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし，n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする。

(1) a_2, a_3 を求めよ。

(2) s_n を求めよ。

(3) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。

(4) a_n を求めよ。

5 $0 < a < 2\pi$ とする。$0 < x < 2\pi$ に対して

$$F(x) = \int_x^{x+a} \sqrt{1 - \cos\theta}\, d\theta$$

と定める。

(1) $F'(x)$ を求めよ。

(2) $F'(x) \leqq 0$ となる x の範囲を求めよ。

(3) $F(x)$ の極大値および極小値を求めよ。