1 $0 \leq \theta < \pi$ に対して，行列

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換を f とし，点 P の f による像を $f(P)$ で表す。

(1) 点 $Q\left(\cos\dfrac{\theta}{2}, \sin\dfrac{\theta}{2}\right)$ に対して，$f(Q)$ の座標を求めよ。

(2) 点 $R\left(\sin\dfrac{\theta}{2}, -\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$ に対して，$f(R)$ の座標を求めよ。

(3) f は直線 $y = \left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称移動であることを示せ。

2 a を実数とする。xyz 空間内の 4 点を $A(0,a,4)$, $B(-2,0,3)$, $C(1,0,2)$, $D(0,2,3)$ とし，点 $P(1,0,6)$ に光源をおく。

(1) 光源が xy 平面上につくる点 A の影の座標を求めよ。また，a が実数全体にわたって変化するとき，その影がつくる直線の方程式を求めよ。

(2) 光源が xy 平面上につくる三角形 BCD の影は三角形となる。この三角形の頂点の座標を求めよ。

(3) $a < 5$ とする。光源が xy 平面上につくる四面体 $ABCD$ の影を考える。この影が三角形となるような a の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ k を実数とし，$x \geqq 0$ に対して $f(x) = xe^{-x}$，$g(x) = kx$ と定める。ただし，$e = 2.7182\cdots$ は自然対数の底である。

(1) $0 < x \leq 2$ の範囲に $f(x) = g(x)$ を満たす x がただ 1 つ存在するための k の範囲を求めよ。

(2) k が (1) の範囲にあるとき，(1) で定まる x を a とする。積分

$$\int_0^a f(x)\,dx$$

の値を k を用いて表せ。

(3) k が (1) の範囲にあるとき，積分

$$\int_0^2 |f(x) - g(x)|\,dx$$

の値が最小となる k を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ p を自然数とする。数列 $\{x_n\}$ を漸化式

$$x_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right), \quad x_{n+1} = 2(x_n)^2 - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。

(1) x_n を求めよ。

(2) l を自然数とする。$p = 2^l$ および $p = 3 \times 2^l$ のそれぞれの場合について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

(3) l を自然数とする。$p = 5 \times 2^l$ のとき，数列 $\{x_n\}$ は発散することを示せ。