

1 a, b, c を正の実数とする。

(1) $t > 0$ に対して、不等式 $bt^{b+c} + c \geq (b+c)t^b$ が成り立つことを示せ。

(2) $x > 0, y > 0$ に対して、不等式 $ax^{a+b+c} + by^{a+b+c} + c \geq (a+b+c)x^a y^b$ が成り立つことを示せ。

2 2×2 行列 A と B が $AB = BA$ をみたすとき、 A と B は交換可能であるという。

(1) A と B が交換可能ならば、 AB と B は交換可能であることを示せ。

(2) 行列 X, C, E を

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定める。ただし、 a, b, c, d は実数とする。 X と C が交換可能のとき、 X は実数 α, β を用いて $\alpha C + \beta E$ と表されることを示せ。

(3) 上の行列 C に対して、次の 3 条件を同時にみたす 2×2 行列 Y をすべて求めよ。

(a) Y と C は交換可能。

(b) $CY = tY$ をみたす実数 t がある。

(c) Y の $(2, 2)$ 成分は 1 である。

3 相異なる 3 点 A, B, C の上を動く点 P がある。点 P の 1 秒後の位置が以下のルールに従って定まるものとする。

(i) A にいるときは、確率 $\frac{1}{3}$ で A にとどまるか、確率 $\frac{1}{3}$ で B に移るか、確率 $\frac{1}{3}$ で C に移る。

(ii) B にいるときは、必ず C に移る。

(iii) C にいるときは、確率 $\frac{1}{2}$ で A に移るか、確率 $\frac{1}{2}$ で B に移る。

いま、点 P が A からスタートしてこのルールに従って n 秒後に A, B, C にいる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする。

(1) $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ を求めよ。

(2) $n \geq 2$ のとき、 a_n を $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ を用いて表せ。

(3) a_n, b_n, c_n を求めよ。

4 方程式 $3x^2 + y^2 = 3$ で定まる楕円 E と、方程式 $xy = \frac{3}{4}$ で定まる双曲線 H を考える。

(1) 楕円 E と双曲線 H の交点をすべて求めよ。

(2) 連立不等式

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 \leq 3 \\ xy \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

の表す領域の面積を求めよ。