$\boxed{\mathbf{1}}$ a は実数とし、2 つの曲線

$$C_1 : y = (x-1)e^x, \quad C_2 : y = \frac{1}{2e}x^2 + a$$

がある。ただし、e は自然対数の底である。C_1 上の点 $(t, (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする。

(1) a を t で表せ。

(2) t が実数全体を動くとき、a の極小値、およびそのときの t の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ p, q は正の実数とし、

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = pa_n + (-q)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{p^n}$ とする。数列 $\{b_n\}$ の一般項を p, q, n で表せ。

(2) $q = 1$ とする。すべての自然数 n について $a_{n+1} \geqq a_n$ となるような p の値の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 空間の 3 点 $O(0,0,0)$, $A(1,1,1)$, $B(-1,1,1)$ の定める平面を α とし、$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ とおく。α 上の点 C があり、その x 座標が正であるとする。ベクトル $\overrightarrow{OC}$ が α に垂直で、大きさが 1 であるとする。$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ とおく。

(1) C の座標を求めよ。

(2) $\overrightarrow{b} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{c}$ をみたす実数 s, t を求めよ。

(3) α 上にない点 $P(x, y, z)$ から α に垂線を下ろし、α との交点を H とする。$\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{a} + l\overrightarrow{c}$ をみたす実数 k, l を x, y, z で表せ。

4 初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある。その袋に対して以下の試行を繰り返す。

(i) まず同時に 2 個の玉を取り出す。

(ii) その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し、色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる。

(iii) 最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ、1 回の試行を終える。

n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする。

(1) $X_1 = 3$ となる確率を求めよ。

(2) $X_2 = 3$ となる確率を求めよ。

(3) $X_2 = 3$ であったとき、$X_1 = 3$ である条件付き確率を求めよ。

5 n は自然数、a は $a > \dfrac{3}{2}$ をみたす実数とし、実数 x の関数

$$f(x) = \int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta$$

を考える。ただし、$n = 1$ のときは $\sin^{n-1}\theta = 1$ とする。

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}\theta d\theta = \frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta d\theta$$

を示せ。

(2)

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

をみたす n と a の値を求めよ。

(3) (2) で求めた n と a に対して、$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。