

1 $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \int_1^e t^{x-1} \log t \, dt$ を考える。ただし、 $\log t$ は t の自然対数とし、 e は自然対数の底とする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $x > 0$ において、関数 $g(x) = x^2 f(x) - x^2$ の極小値、およびそのときの x の値を求めよ。

2 p を 3 以上の奇数、 θ を $\cos \theta = \frac{1}{p}$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) をみたす実数とし、数列 $\{a_n\}$ を $a_n = p^n \cos(n\theta)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。

(1) a_2 を p で表せ。

(2) a_{n+2} を a_{n+1} , a_n , p で表せ。

(3) すべての n について a_n は p で割り切れない整数であることを示せ。

3 方程式 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ で定まる楕円 E とその焦点 $F(1, 0)$ がある。 E 上に点 P をとり、直線 PF と E との交点のうち P と異なる点を Q とする。 F を通り直線 PF と垂直な直線と E との 2 つの交点を R, S とする。

(1) r を正の実数、 θ を実数とする。点 $(r \cos \theta + 1, r \sin \theta)$ が E 上にあるとき、 r を θ で表せ。

(2) P が E 上を動くとき、 $PF + QF + RF + SF$ の最小値を求めよ。

4 p を正の実数とする。 a, b を実数として $x = a, y = (b - 3)^2$ とおく。点 (a, b) が連立不等式 $0 \leq a \leq p, a \leq b \leq a + 2$ の表す領域内を動くとき、座標平面上の点 (x, y) が動いてできる図形の面積を S とおく。

(1) $p = 1$ のとき S の値を求めよ。

(2) $p = 5$ のとき S の値を求めよ。