

**1** 自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数  $a, n, k$  に対して、 $n(n+1) + a = (n+k)^2$  が成り立つとき、

$$a \geq k^2 + 2k - 1$$

が成り立つことを示せ。

(2)  $n(n+1) + 14$  が平方数となるような自然数  $n$  をすべて求めよ。

**2** 関数  $f(x) = 1 + \sin x - x \cos x$  について、以下の問いに答えよ。

(1)  $f(x)$  の  $0 \leq x \leq 2\pi$  における増減を調べ、最大値と最小値を求めよ。

(2)  $f(x)$  の不定積分を求めよ。

(3) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

**3** 複素数平面上に 3 点 O、A、B を頂点とする  $\triangle OAB$  がある。ただし、O は原点とする。 $\triangle OAB$  の外心を P とする。3 点 A、B、P が表す複素数を、それぞれ  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $z$  とするとき、

$$\alpha\beta = z$$

が成り立つとする。

(1) 複素数  $\alpha$  の満たすべき条件を求め、点  $A(\alpha)$  が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) 点  $P(z)$  の存在範囲を求め、複素数平面上に図示せよ。

- 4 さいころを続けて投げて、数直線上の点  $P$  を移動させるゲームを行う。初め点  $P$  は原点  $0$  にいる。さいころを投げるたびに、出た目の数だけ、点  $P$  を現在の位置から正の向きに移動させる。この試行を続けて行い、点  $P$  が  $10$  に達するか越えた時点でゲームを終了する。 $n$  回目の試行でゲームが終了する確率を  $p_n$  とする。

(1)  $p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9$  となることを示せ。

(2)  $p_9$  の値を求めよ。

(3)  $p_3$  の値を求めよ。

- 5 座標平面上の 3 点  $A(1,0)$ 、 $B(3,1)$ 、 $C(2,2)$  を頂点とする  $\triangle ABC$  の内部および境界を  $T$  とおく。実数  $a$  に対して、条件

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 \leq a$$

を満たす座標平面上の点  $P$  の全体を  $D$  とする。ただし、 $AP$  は点  $A$  と点  $P$  の距離を表す。

- (1)  $D$  が少なくとも 1 つの点  $P$  を含むような  $a$  の値の範囲を求めよ。  
(2)  $D$  が  $T$  を含むような  $a$  の値の範囲を求めよ。  
(3) (1) のもとで、 $D$  が  $T$  に含まれるような  $a$  の値の範囲を求めよ。