$\boxed{\textbf{1}}$ 3 辺の長さが 5，6，7 の三角形を T とする。

(1) T の面積を求めよ。

(2) T を底面とする高さ 4 の直三角柱の内部に含まれる球の半径の最大値を求めよ。ただし，直三角柱とは，すべての側面が底面と垂直であるような三角柱である。

$\boxed{\textbf{2}}$ n を自然数とする。

(1) 二項定理を用いて $(z+z^{-1})^{2n}$ を展開せよ。ただし，z は 0 でない複素数とする。

(2) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおき，(1) の展開式を用いて，等式

$$(2\cos\theta)^{2n} = {}_{2}nC_0\cos(2n\theta) + {}_{2}nC_1\cos(2(n-1)\theta) + \cdots$$
$$\cdots + {}_{2}nC_k\cos(2(n-k)\theta) + \cdots + {}_{2}nC_{2n}\cos(-2n\theta)$$

が成り立つことを示せ。ただし，i は虚数単位である。

(3) 次の等式を示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2n}\,d\theta = \frac{(2n)!\,n}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 実数 c に対して，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}|a_n| + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

によって定める。

(1) $c \geqq 0$ とする。このとき，すべての n に対して $a_n \geqq 0$ が成り立つことを示せ。さらに，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $c < 0$ とする。このとき，すべての n に対して $a_n < 0$ が成り立つような実数 c の値の範囲を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束するような実数 c の値の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ a, b を実数とし，放物線 $y = (x-a)^2 + b$ を Q とおく。また，直線 $y = x - 1$ を l とおく。Q と l は共有点を持たないか，あるいは 1 点で接しているとする。

(1) a, b の満たす条件を求めよ。

(2) Q 上の点のうち l までの距離が最小となるものを A とおく。また，Q 上の点 B における Q の接線は，点 C において l と垂直に交わっているとする。このとき，3 点 A, B, C の座標を a, b を用いて表せ。

(3) a, b がさらに条件

$$a \geqq 0, \quad b \leqq 2, \quad b \leqq 2a + 1$$

を満たすとき，(2) で求めた 3 点を頂点とする $\triangle ABC$ の面積の最大値と最小値を求めよ。