

1 p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 $A(-1, 2, 0)$ 、 $B(2, -2, 1)$ 、 $P(p, -1, 2)$ があり、3 点 O 、 A 、 B が定める平面を α とする。また、点 P から平面 α に垂線を下ろし、 α との交点を Q とする。

(1) 点 Q の座標を p を用いて表せ。

(2) 点 Q が $\triangle OAB$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。

2 n を自然数とし、 $a_n = n(n+1)$ とする。さらに、 a_n と a_{n+3} の最大公約数を d_n とする。

(1) d_n は偶数であることを示せ。

(2) d_n は 8 で割り切れないことを示せ。

(3) p を 5 以上の素数とすると、 d_n は p で割り切れないことを示せ。

(4) $d_n \leq 12$ を示せ。また、 $d_n = 12$ となるような n を 1 つ求めよ。

3 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。 $0, \frac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数

$$f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える。

(1) $f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ。

(2) $f(x)$ の極大値を与える x の値を α 、極小値を与える x の値を β とし、座標平面上に 2 点 $P(\alpha, f(\alpha))$ 、 $Q(\beta, f(\beta))$ をとる。 t が $0 < t < 1$ を満たしながら変化するとき、線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

- 4 n を 3 以上の自然数とする。2 つの箱 X と Y があり、どちらの箱にも 1 から n までの n 枚の番号札が入っている。

A と B の 2 人のうち、A は箱 X から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を得点とする。B は箱 Y から札を 1 枚取り出し、もし取り出した札の番号が 3 から n までのいずれかであればその番号を得点とし、もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば、その札を箱 Y に戻し、再び箱 Y から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を B の得点とする。

- (1) m を n 以下の自然数とする。B の得点が m になる確率を求めよ。
- (2) A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n を求めよ。

- 5 $f(x)$ を区間 $[0, \pi]$ で連続な関数とする。関数 $f_1(x), f_2(x), \dots$ を関係式

$$f_1(x) = f(x),$$

$$f_{n+1}(x) = 2 \cos x + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin(x-t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。さらに、自然数 n に対して

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin t dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt$$

とおく。

- (1) a_{n+1} 、 b_{n+1} を a_n 、 b_n を用いて表せ。
- (2) $c_n = a_n - 1$ とおく。このとき、 $c_{n+2} = -c_n$ が成立することを示し、一般項 c_n を a_1 と b_1 を用いて表せ。
- (3) a_n 、 b_n が n によらない定数となるような $f(x)$ を 1 つ求めよ。