

1 n を 3 以上の自然数とする。当たりくじ 2 本を含む n 本のくじがある。くじを引いて、当たりなら持ち点に 1 を加算し、はずれなら持ち点は変わらないとする。最初の持ち点は 0 とし、くじを引いてはもどすという試行を n 回繰り返す。

k を 0 以上の整数とする。 n 回の試行が終了した時点の持ち点が k となる確率を $p_n(k)$ とする。

(1) 確率 $p_n(k)$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k)$ を求めよ。ただし、 e を自然対数の底とするととき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$$

であることを用いてもよい。

(3) $p(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k)$ と定める。値 $p(k)$ が最大となるような k の値を求めよ。

2 a, t は実数で、 a は 1 以上とする。座標平面上の 3 点 $O(0, 0)$ 、 $A(a, a - 1)$ 、 $P(t, t^2 + 1)$ を頂点とする三角形の重心 G の座標を (X, Y) とする。

(1) X と Y を、 a と t を用いて表せ。

(2) $a = 1$ とする。 t が実数全体を動くとき、 G の軌跡を求め、座標平面上に図示せよ。

(3) a が 1 以上の実数全体を、 t が実数全体を動くとき、 G が通過する範囲を座標平面上に図示せよ。

3 r を正の実数とする。複素数平面上に、点 α を中心とする半径 r の円 C' がある。ただし、 C' は原点を通らないものとする。点 z が円 C' 上を動くとき、点 $w = \frac{1}{z}$ の描く図形を C とする。

- (1) C は円であることを示せ。さらに、 C の中心と半径を α と r で表せ。
- (2) C と C' が一致するとき、 C' の中心 α は実軸上または虚軸上にあることを示せ。

4 関数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ($x \geq 1$) と関数 $g(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ($t \geq 0$) を考える。ただし、 e は自然対数の底とする。

- (1) $g(t) \geq 1$ を示せ。
- (2) $a > 0$ とする。定積分 $\int_0^a f(g(t))g'(t)dt$ を求めよ。
- (3) 座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。 $p > 1$ とし、 C 上の点 $(p, f(p))$ における接線を l とする。このとき、曲線 C 、直線 l 、 x 軸で囲まれた図形の面積 S を p で表せ。