$\boxed{\mathbf{1}}$ 三角形 ABC について

$$|\overrightarrow{AB}| = 1, \quad |\overrightarrow{AC}| = 2, \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6}$$

が成立しているとする。三角形 ABC の外接円の中心を O とし、直線 AO と外接円との A 以外の交点を P とする。

(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ が成り立つような実数 s, t を求めよ。

(3) 直線 AP と直線 BC の交点を D とするとき、線分 AD の長さを求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上の 2 点 $\left(\dfrac{1}{16}\ ,\ 0\right)$, $\left(0\ ,\ \dfrac{1}{9}\right)$ を通る直線 ℓ を考える。

(1) ℓ 上にある格子点の座標をすべて求めよ。ただし、格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数であるような点のことである。

(2) ℓ 上の格子点のうち、原点との距離が最小となる点を A とする。また、ℓ 上の A 以外の格子点のうち、原点との距離が最小となる点を B とする。さらに、A の x 座標と B の y 座標をそれぞれ x 座標と y 座標とする点を C とする。三角形 ABC の内部および周上にある格子点の個数を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い、出た目を順に $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。

(1) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。

(3) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ α を $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とし、$f(x) = \sin \dfrac{\pi x}{2}$ とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定義されるとき、次の問に答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して、$0 < a_n < 1$ かつ $a_{n+1} > a_n$ が成り立つことを示せ。

(2) $b_n = \dfrac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$ とおくとき、すべての自然数 n に対して、$b_{n+1} < b_n$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ および (2) で定めた $\{b_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ α を正の定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して次の条件を満たしているとする。

$$0 < f(x) < 1, \quad \int_0^x \frac{f'(t)}{(1 - f(t))f(t)}\, dt = ax$$

さらに、$f(0) = \dfrac{1}{3}$ であるとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 0, x = 1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。さらに、$\displaystyle\lim_{a \to +0} S(a)$ を求めよ。