

- 1** 三角形 OAB において、辺 AB を $2:1$ に内分する点を D とし、直線 OA に関して点 D と対称な点を E とする。

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

とし、 $|\vec{a}| = 4$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ を満たすとする。

- (1) 点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする。

$\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

- (2) $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表せ。

- (3) 三角形 BDE の面積が $\frac{5}{9}$ になるとき、 $|\vec{b}|$ の値を求めよ。

- 2** a を $a \neq -3$ を満たす定数とする。放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上の点 $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ における接線を ℓ_1 、点 $B\left(a+2, \frac{(a+2)^2}{2}\right)$ における接線を ℓ_2 とする。 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を C とおく。

- (1) C の座標を a を用いて表せ。

- (2) a が $a > 0$ を満たしながら動くとき、 $\frac{|AB|}{|BC|}$ が最小となるときの a の値を求めよ。ただし、 $|AB|$ および $|BC|$ はそれぞれ線分 AB と線分 BC の長さを表す。

3

正の実数 x, y が, 方程式

$$\frac{9^{4x} + 9^{y^2+1}}{6} = 3^{4x+y^2} \quad \dots \quad (\star)$$

を満たすとする。

(1) y^2 を x を用いて表せ。

(2) 正の実数 x, y が $(\star)$ および $1 - \frac{x}{y} > 0$ を満たしながら動くとき,

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}} 4} + \frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}} 4}$$

の最大値を求めよ。

4

$a_1 = 2, b_1 = 1$ および

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められた数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がある。 $c_n = a_n b_n$ とおく。

(1) c_2 を求めよ。

(2) c_n は偶数であることを示せ。

(3) n が偶数のとき、 c_n は 28 で割り切れることを示せ。

5

座標平面上で、媒介変数 θ を用いて

$$x = (1 + \cos \theta) \cos \theta, \quad y = \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

と表される曲線 C がある。 C 上の点で x 座標の値が最小になる点を A とし、 A の x 座標の値を a とおく。 B を点 $(a, 0)$ 、 O を原点 $(0, 0)$ とする。

(1) a を求めよ。

(2) 線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分の面積を求めよ。