$\boxed{\textbf{1}}$ 整数 a, b, c に対し，$S = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ とおく。

(1) $a + b + c = 0$ のとき，$S = 0$ であることを示せ。

(2) $S = 2022$ をみたす整数 a, b, c は存在しないことを示せ。

(3) $S = 63$ かつ $a \leqq b \leqq c$ をみたす整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

$\boxed{\textbf{2}}$ a, b, c を正の実数とし，次の連立不等式①と連立不等式②を考える。

$$
① \begin{cases} ay + bx < (6c - 3)ab \\ ay - bx < (6c - 3)ab \\ y > (2 - 3c)b \end{cases}
\qquad
① \begin{cases} ay + bx > -ab \\ ay - bx > -ab \\ y < b \end{cases}
$$

(1) $c = 1$ のとき，①をみたすが②をみたさない実数の組 (x, y) が定める領域を xy 平面上に図示せよ。

(2) $c > \dfrac{5}{9}$ のとき，命題「実数の組 (x, y) が①をみたすならば，②もみたす」が真となるための，a, b, c に関する必要十分条件を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ a を実数とし，xy 平面上に点 $A(a,8)$ および点 $B(2,4)$ をとる。xy 平面上に直線 ℓ をとり，ℓ に関して点 A，B と対称な点をそれぞれ P，Q とおく。

(1) 点 Q が y 軸上の点 $(0,2b+4)$ であるとき，直線 ℓ の方程式を，b を用いて表せ。

(2) 点 P が x 軸上に，点 Q が y 軸上にあるような直線 ℓ がちょうど 3 本存在する a の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ a は 0 でない複素数で，$0 \leqq \arg a < \dfrac{\pi}{4}$ をみたすものとする。複素数平面上の点 $A(-a^2+2ia)$，点 $B(-1)$ と原点 O に対し，点 B を通り，$\angle ABO$ を 2 等分する直線を ℓ とする。ただし，i は虚数単位とする。

(1) t を正の実数, z を複素数とする。点 $P(z)$ は直線 ℓ 上にあり, $BP=t$ かつ z の虚部は 0 以上とする。このとき，z を a と t で表せ。

(2) a は $\left|a-\left(2+\dfrac{i}{2}\right)\right| = \dfrac{1}{2}$ をみたして動くとする。直線 ℓ と原点 O との距離が最小となる a を求めよ。