1 複素数平面上における図形 $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ は次の条件 (A) と (B) をみたすとする。ただし，i は虚数単位とする。

(A) C_i は原点 O を中心とする半径 2 の円である。

(B) 自然数 n に対して，z が C_n 上を動くとき $2w = z + 1 + i$ で定まる w の描く図形が C_{n+1} である。

(1) すべての自然数 n に対して，C_n は円であることを示し，その中心を表す複素数 a_n と半径 r_n を求めよ。

(2) C_n 上の点 O との距離の最小値を d_n とする。このとき，d_n を求めよ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n$ を求めよ。

2 O を原点とする座標空間において，3 点 $A(4, 2, 1)$、$B(1, -4, 1)$、$C(2, 2, -1)$ を通る平面を α とおく。また，球面 S は半径が 9 で，S と α の交わりは A を中心とし B を通る円であるとする。ただし，S の中心 P の z 座標は正とする。

(1) 線分 AP の長さを求めよ。

(2) P の座標を求めよ。

(3) S と直線 OC は 2 点で交わる。その 2 点間の距離を求めよ。

3 以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底を表す。

(1) k を実数の定数とし，$f(x) = xe^{-x}$ とおく。方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ を用いてもよい。

(2) $xye^{-(x+y)} = c$ をみたす正の実数 x、y の組がただ 1 つ存在するときの実数 c の値を求めよ。

(3) $xye^{-(x+y)} = \dfrac{3}{e^4}$ をみたす正の実数 x、y を考えるとき，y のとりうる値の最大値とそのときの x の値を求めよ。

4 n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に $a_1, a_2, \ldots, a_n$ とし、

$$K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$$

とおく。また、K_n のとりうる値の最小値を q_n とする。

(1) $K_3 = 5$ となる確率を求めよ。

(2) q_n を求めよ。また、$K_n = q_n$ となるための $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に関する必要十分条件を求めよ。

(3) n を 4 以上の自然数とする。$L_n = K_n + |a_4 - 4|$ とおき、L_n のとりうる値の最小値を r_n とする。$L_n = r_n$ となる確率 p_n を求めよ。

5 a, b を $a^2 + b^2 < 1$ をみたす正の実数とする。また、座標平面上で原点を中心とする半径 1 の円を C とし、C の内部にある 2 点 $A(a, 0)$、$B(0, b)$ を考える。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に対して C 上の点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ を考え、P における C の接線に関して B と対称な点を D とおく。

(1) $f(\theta) = ab\cos 2\theta + a\sin\theta - b\cos\theta$ とおく。方程式 $f(\theta) = 0$ の解が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在することを示せ。

(2) D の座標を b, θ を用いて表せ。

(3) θ が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、3 点 A, P, D が同一直線上にあるような θ は少なくとも 1 つ存在することを示せ。また、このような θ はただ 1 つであることを示せ。