

1 以下で e は自然対数の底である。必要ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ を用いてもよい。

(1) $t > 0$ のとき、 $e \leq \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ の大小を判定し、その結果が正しいことを示せ。

(2) $t > 0$ のとき、 $e^{1 - \frac{1}{2t}} \leq \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ の大小を判定し、その結果が正しいことを示せ。

2 座標平面上にある放物線 $y = x^2$ を C とし、 C 上の 2 点 $A(\alpha, \alpha^2)$ と $B(\beta, \beta^2)$ を考える。ただし、 $\alpha < \beta$ とする。 C の A における接線 ℓ_1 と、 B における接線 ℓ_2 との交点を P とする。また、 A を通り ℓ_1 と直交する直線 m_1 と、 B を通り ℓ_2 と直交する直線 m_2 との交点を Q とする。さらに、3 点 A, B, Q を通る円の中心を点 $S(s, t)$ とする。

(1) P と Q の座標を α, β を用いて表せ。

(1) s と t を α, β を用いて表せ。

(2) α, β が $\alpha < \beta$ かつ $s = 0$ をみたしながら動くとき、 t のとりうる値の範囲を求めよ。

3 p を 3 以上の素数とする。箱 S には 1 から p までの番号札が 1 枚ずつ計 p 枚入っており、箱 T には 1 から $4p$ までの番号札が 1 枚ずつ計 $4p$ 枚入っている。箱 S と箱 T から番号札を 1 枚ずつ取り出し、書かれている数をそれぞれ X, Y とする。

- (1) X と Y の積が p で割り切れる確率を求めよ。
- (2) X と Y の積が $2p$ で割り切れる確率を求めよ。

4

以下の問いに答えよ。

- (1) α は $\alpha > 1$ をみたす実数とする。2 以上の自然数 n に対して、不等式

$$1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq (\alpha-1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\alpha}} \leq \alpha - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

が成り立つことを示せ。

- (2) 3 以上の自然数 n に対して、不等式

$$\frac{3}{2} - \log 3 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \leq 1$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $\log x$ は x の自然対数である。