

**1** 実数全体で定義された関数

$$f(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}$$

について、次の間に答えよ。

- (1)  $f(x)$  が極大となる  $x$  の値を求めよ。
- (2) 次の数列  $\{a_n\}$  が収束するように実数  $k$  の値を定め、その極限値を求めよ。

$$a_n = k \log(n+1) - \int_2^{n+1} f(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ただし、 $\log(n+1)$  は  $n+1$  の自然対数である。

**2** 次の間に答えよ。

- (1)  $x$  の方程式  $(k-1)x^2 + (k+1)x + k-1 = 0$  が相異なる 2 つの実数解をもつような整数  $k$  をすべて求めよ。
- (2)  $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$  が整数となるような実数  $x$  をすべて求めよ。

- 3** 3つの複素数の組  $(z_1, z_2, z_3)$  が  $z_1 z_2 z_3 \neq 0$  および次の①から③をみたすとする。

$$z_1 = z_2 + \bar{z}_3 \quad \cdots \quad \textcircled{1},$$

$$z_2 = \bar{z}_1 z_3 \quad \cdots \quad \textcircled{2},$$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \quad \cdots \quad \textcircled{3}$$

ただし,  $\bar{z}_1, \bar{z}_3$  はそれぞれ  $z_1, z_3$  の共役複素数を表す。

- (1) ②と③を用いて,  $z_2$  が実数であることを示せ。
- (2)  $z_1$  が実数である  $(z_1, z_2, z_3)$  の組をすべて求めよ。
- (3)  $z_1$  が実数でない  $(z_1, z_2, z_3)$  の組をすべて求めよ。

- 4**  $0 < t < 1$  とし,  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq t$ ) で定まる曲線を  $C$  とする。点  $P(t, \sin t)$  を通り  $y$  軸と平行な直線を  $\ell_1$ ,  $P$  を通り  $x$  軸と平行な直線を  $\ell_2$  とする。 $\ell_1, x$  軸,  $C$  で囲まれる図形が  $x$  軸の周りに1回転してできる立体の体積を  $V(t)$  とする。 $\ell_2, y$  軸,  $C$  で囲まれる図形が  $y$  軸の周りに1回転してできる立体の体積を  $W(t)$  とする。このとき, 次の間に答えよ。ただし, 必要ならば

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\cos t}{t^2} - \frac{\sin t}{t^3} \right) = -\frac{1}{3}$$

を用いてもよい。

- (1)  $V(t)$  を求めよ。
- (2)  $W(t)$  を求めよ。
- (3) 極限  $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{W(t)}{\pi t^2 \sin t}$  を求めよ。