

1

(30 点)

複素数 α は $|\alpha| = 1$ を満たしている. このとき, $|\alpha^m + \alpha^{-m}| > 1$ となる自然数 m が存在することを示せ.

2

(30 点)

実数 x, y が $x \geq y \geq 1$ を満たすとき, 次の不等式が成立することを示せ.

$$(x + y - 1) \log_2(x + y) \geq (x - 1) \log_2 x + (y - 1) \log_2 y + y$$

3

(30 点)

xy 平面上の点で x 座標, y 座標がともに整数である点を格子点という.

- (1) 格子点を頂点とする三角形の面積は $\frac{1}{2}$ 以上であることを示せ.
- (2) 格子点を頂点とする凸四角形の面積が 1 であるとき, この四角形は平行四辺形であることを示せ.

4

(30 点)

関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は次の条件 (イ), (ロ) を満たしている。

- (ア) $y = f(x)$ のグラフは、点 $(0,1)$ に関して点対称である。
 (イ) $y = f(x)$ は相異なる 2 つの極値をもち、2 つの極値の差の絶対値は 4 に等しい。

このとき

- (1) $y = f(x)$ のグラフは x 軸と相異なる 3 点で交わることを示せ。
 (2) (1) における 3 点の x 座標を α, β, γ (ただし $\alpha < \beta < \gamma$ とする) とおくと、 $f\left(\frac{-\beta-\gamma}{2}\right) > 2$ を示せ。

5

(30 点)

xy 平面において座標軸に平行な直線 $x = m$ および $y = n$ ($m = 0, 1, 2, n = 0, 1, 2$) で表される道路網がある。原点 $(0, 0)$ からみて x 軸の正の方向が東、 y 軸の正の方向が北であるものとする。A と B の 2 人が同時にそれぞれ $(2, 2)$ 、 $(0, 0)$ から出発して道路を進む。A の速さと B の速さは等しく、両者は各交差点において独立に進行方向を次のように決める。

A は確率 p で南、確率 $1 - p$ で西に進む。B は確率 q で北、確率 $1 - q$ で東に進む。

ただし、 $0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$ とする。このとき

- (1) 2 人が出会う確率 $f(p, q)$ を求めよ。
 (2) q が $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$ の範囲で与えられたとき、 $f(p, q)$ が最大となる p の値、およびその最大値 $M(q)$ を q を用いて表せ。

問題は、このページで終わりである。