

1

(30 点)

から n ($n \geq 2$) までの番号が、順番に 1 つずつ書かれた n 枚の札が袋に入っている。この袋の中から札を 1 枚ずつ取り出し、つぎの (i), (ii) のルールに従って A または B の箱に入れる。

- (i) 最初に取り出した札は A の箱に入れる。
- (ii) 2 番目以降に取り出した札は、その番号がそれまでに取り出された札の番号のどれよりも大きければ A の箱に入れ、そうでないときは B の箱に入れる。

n 枚の札すべてを取り出し、箱に入れ終わったとき、 B の箱にちょうど 1 枚の札が入っている確率を求めよ。

2

(35 点)

楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ と円 $(x-a)^2 + y^2 = b$ ($b > 0$) が相異なる 4 点で交わるという。このとき点 (a, b) のとりうる範囲を図示せよ。

3

(30 点)

各面が鋭角三角形からなる四面体 $ABCD$ において、辺 AB と辺 CD は垂直ではないとする。このとき辺 AB を含む平面 α に点 C 、点 D から下ろした垂線の足をそれぞれ C' 、 D' とするとき、4 点 A, B, C', D' がすべて相異なり、しかも同一円周上にあるように α がとれることを示せ。

4

(35 点)

$f(x)$ は x^n の係数が 1 である x の n 次式である. 相異なる n 個の有理数 $q_1, q_2, \dots, q_n$ に対して $f(q_1), f(q_2), \dots, f(q_n)$ がすべて有理数であれば, $f(x)$ の係数はすべて有理数であることを, 数学的帰納法を用いて示せ.

5

(35 点)

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を $a_1 = 3, b_1 = 2$ で定め,

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2, \quad b_{n+1} = 2a_nb_n \quad (n \geq 1)$$

とする。

(1) $a_n^2 - 2b_n^2$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

6

(35 点)

閉区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ で定義された関数 $f(x)$ が

$$f(x) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-y)f(y)dy = x+1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

を満たしている。 $f(x)$ を求めよ。補足： $\sin(x-y)f(y)$ は $\sin(x-y)$ と $f(y)$ の積の意味である。

問題は、このページで終わりである。