$\boxed{\mathbf{1}}$

(30 点)

$$f(\theta) = \cos 4\theta - 4\sin^2\theta$$

とする。$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$

(35 点)

$a > 0$ とし，$x > 0$ で定義された関数

$$f(x) = \left(\frac{e}{x^\alpha} - 1\right)\frac{\log x}{x}$$

を考える。$y = f(x)$ のグラフより下側で x 軸より上側の部分の面積を α であらわせ。

ただし，e は自然対数の底である。

$\boxed{\mathbf{3}}$

(35 点)

n を 2 以上の自然数とする。x^{2n} を $x^2 - x + \dfrac{n-1}{n^2}$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする。すなわち，x の多項式 $P_n(x)$ があって

$$x^{2n} = P_n(x)\left(x^2 - x + \frac{n-1}{n^2}\right) + a_n x + b_n$$

が成り立っているとする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$

(35 点)

行列 A, B を

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

とする。次の (*) が成り立つための実数 α, β についての必要十分条件を求めよ。

(*) どんな 2 次正方行列 Y に対しても, 2 次正方行列 X で $AX-XB=Y$ となるものがある。

$\boxed{\mathbf{5}}$

(30 点)

複素数 α に対してその共役複素数を $\overline{\alpha}$ で表わす。α を実数ではない複素数とする。複素平面内の円 C が 1, -1, α を通るならば, C は $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ も通ることを示せ。

$\boxed{\mathbf{6}}$

(35 点)

N を自然数とする。$N+1$ 個の箱があり, 1 から $N+1$ までの番号が付いている。どの箱にも玉が 1 個入っている。番号 1 から N までの箱に入っている玉は白玉で, 番号 $N+1$ の箱に入っている玉は赤玉である。次の操作 (*) を, 各 $k=1,2,\cdots,N+1$ に対して, k が小さい方から順番に 1 回ずつ行う。

(*) k 以外の番号の N 個の箱から 1 個の箱を選び, その箱の中身と番号 k の箱の中身を交換する。(ただし, N 個の箱から 1 個の箱を選ぶ事象は, どれも同様に確からしいとする。)

操作がすべて終了した後, 赤玉が番号 $N+1$ の箱に入っている確率を求めよ。

問題は，このページで終わりである。