

1

(30 点)

1 次式 $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ に対して $\{A(x)\}^2 + \{B(x)\}^2 = \{C(x)\}^2$ が成り立つとする。このとき $A(x)$ と $B(x)$ はともに $C(x)$ の定数倍であることを示せ。

2

(35 点)

a を実数として, 行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ と定める。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし, 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を次の式で定める。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

このとき数列 $\{x_n\}$ が収束するための a の必要十分条件を求めよ。

3

(35 点)

さいころを n 個同時に投げるとき, 出た目の数の和が $n+3$ になる確率を求めよ。

4

(35 点)

平面上の点 O を中心とし半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある。

$\triangle ABC$ の内接円の半径 r は $\frac{1}{2}$ 以下であることを示せ。

5

(35 点)

$H > 0, R > 0$ とする．空間内において，原点 O と点 $P(R, 0, H)$ を結ぶ線分を， z 軸のまわりに回転させてできる容器がある．この容器に水を満たし，原点から水面までの高さが h のとき単位時間あたりの排水量が $\sqrt{h}$ となるように，水を排出する．すなわち，時刻 t までに排出された水の総量を $V(t)$ とおくとき， $\frac{dV}{dt} = \sqrt{h}$ が成り立つ．このときすべての水を排出するのに要する時間を求めよ．

6

(30 点)

$\tan 1^\circ$ は有理数か。

問題は，このページで終わりである。