

1

(30 点)

1. 辺 AB , 辺 BC , 辺 CA の長さがそれぞれ 12, 11, 10 の三角形 ABC を考える。 $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、線分 AD の長さを求めよ。
2. 箱の中に、1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている。ただし、異なるカードには異なる番号が書かれているものとする。この箱から 2 枚のカードを同時に選び、小さいほうの数を X とする。これらのカードを箱に戻して、再び 2 枚のカードを同時に選び、小さいほうの数を Y とする。 $X = Y$ である確率を求めよ。

2

(30 点)

四面体 $OABC$ において、点 O から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする。 $OA \perp BC$, $OB \perp OC$, $|OA| = 2$, $|OB| = |OC| = 3$, $|AB| = \sqrt{7}$ のとき、 $|OH|$ を求めよ。

3

(30 点)

実数 a が変化するとき、3 次関数 $y = x^3 - 4x^2 + 6x$ と直線 $y = x + a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか、 a の値によって分類せよ。

4

(30 点)

 xy 平面上で、連立不等式

$$\begin{cases} y \leq 2, \\ y \geq x, \\ y \leq \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2 \end{cases}$$

を満たす領域の面積を求めよ。

5

(30 点)

0 以上の整数を 10 進法で表すとき、次の問いに答えよ。ただし、0 は 0 桁の数と考えることにする。また n は正の整数とする。

1. 各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数を考える。それらすべての整数の総和を T_n とする。 T_n を n を用いて表せ。
2. 各桁の数が 0, 1, 2 のいずれかである n 桁以下の整数を考える。それらすべての整数の総和を S_n とする。 S_n が T_n の 15 倍以上になるのは、 n がいくつ以上のときか。必要があれば、 $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ および $0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ を用いてもよい。

問題は、このページで終わりである。