1

(30 点)

(1) 2 つの曲線 $y = x^4$ と $y = x^2 + 2$ とによって囲まれる図形の面積を求めよ。

(2) n を 3 以上の整数とする。1 から n までの番号をつけた n 枚の札の組が 2 つある。これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて、札を 1 枚ずつ 3 回取り出し、取り出した順にその番号を X_1, X_2, X_3 とする。$X_1 < X_2 < X_3$ となる確率を求めよ。ただし一度取り出した札は元に戻さないものとする。

2

(30 点)

正四面体 OABC において、点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし P, Q, R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする。△ PQR が正三角形ならば、3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。

3

(30 点)

実数 x, y が条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。

4

(30 点)

次の命題 (p), (q) のそれぞれについて、正しいかどうか答えよ。正しければ証明し、正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが 60° である三角形を作ることができるならば、n は 3 の倍数である。

(q) $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ において、$AB = A'B'$、$BC = B'C'$、$\angle A = \angle A'$ ならば、これら 2 つの三角形は合同である。

5

(30 点)

次の条件 $(*)$ を満たす正の実数の組 (a, b) の範囲を求め、座標平面上に図示せよ。

$(*)$ $\cos a\theta = \cos b\theta$ かつ $0 < \theta \leq \pi$ となる θ がちょうど 1 つある。

問題は，このページで終わりである。