$\boxed{\mathbf{1}}$

(35 点)

(1) a が正の実数のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$

(35 点)

正四面体 OABC において，点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし P, Q, R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする。△ PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$

(30 点)

実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。

4 (30点)

(1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(2) $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2}) = 0$ を満たしているとする。このとき $P(x)$ は $x^3 - 2$ で割り切れることを証明せよ。

5 (35点)

次の命題 (p)、(q) のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが 60° である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である。

(q) $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ において，$AC < AD$ かつ $BC < BD$ ならば，$\angle C > \angle D$ である。

6 (35点)

さいころを n 回投げて出た目を順に $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。さらに

$$Y_1 = X_1, \quad Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}} \quad (k = 2, \cdots, n)$$

によって $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ を定める。

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1 + \sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ。

問題は，このページで終わりである。