1

(30 点)

$0 \leqq \theta < 90^\circ$ とする。x についての 4 次方程式

$$\{x^2 - 2(\cos\theta)x - \cos\theta + 1\}\{x^2 + 2(\tan\theta)x + 3\} = 0$$

は虚数解を少なくとも 1 つ持つことを示せ。

2

(30 点)

t を実数とする。$y = x^3 - x$ のグラフ C へ点 $P(1, t)$ から接線を引く。

(1) 接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ。

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき，$P(1, t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ。

3

(30 点)

座標空間における次の 3 つの直線 l, m, n を考える：

- l は点 $A(1, 0, -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u} = (2, 1, -1)$ に平行な直線
- m は点 $B(1, 2, -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v} = (1, -1, 1)$ に平行な直線
- n は点 $C(1, -1, 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w} = (1, 2, 1)$ に平行な直線

P を l 上の点として，P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき，$PQ^2 + PR^2$ を最小にするような P と，そのときの $PQ^2 + PR^2$ を求めよ。

4

(30 点)

次の式

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 次の不等式

$$a_n^2 - 2a_n > 10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

5

(30 点)

1 から 20 までの目がふられた正 20 面体のサイコロがあり，それぞれの目が出る確率は等しいものとする。A、B の 2 人がこのサイコロをそれぞれ一回ずつ投げ，大きな目を出した方はその目を得点とし，小さな目を出した方は得点を 0 とする。また同じ目が出た場合は，A、B ともに得点を 0 とする。このとき，A の得点の期待値を求めよ。

問題は，このページで終わりである。