

1

(20 点)

n を 2 以上の整数とする。原点 O を中心とした半径 1 の円周を n 等分する点を時計回りに $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ とする。これら n 点から無作為に 1 点を選ぶ試行を独立に 3 回繰り返し、3 点 P, Q, R を順に選ぶ。ただし、 P, Q, R は重複を許して選び、どの n 点も同じ確からしさで選ぶものとする。 $0 \leq j, k, l \leq n-1$ に対し、 P, Q, R がそれぞれ P_j, P_k, P_l である確率を p_{jkl} とする。3 点 P_j, P_k, P_l が異なるとき、三角形 $P_j P_k P_l$ の面積を S_{jkl} とおく。また、3 点 P_j, P_k, P_l に重複があるとき、 $S_{jkl} = 0$ とおく。

$$E_n = \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^{n-1} p_{jkl} S_{jkl} \right) \right\}$$

とおく。 E_n を求めよ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ を求めよ。

$0 \leq x \leq 1$ の範囲で定義された連続関数 $f(x)$ に対し、 x が $0 \leq x \leq 1$ の範囲を動くときの $f(x)$ の最大値を $\max_{0 \leq x \leq 1} f(x)$ とおく。以下の設問に答えよ。

(1) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で定義された狭義単調増加な連続関数 $f(x)$ に対し、以下の不等式が成立することを示せ。

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq 3 \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^x f(t) dt \right|$$

ただし、 $f(x)$ が狭義単調増加であるとは、「 $x < y$ ならば $f(x) < f(y)$ 」を満たすことをいう。

(2) 以下の条件 (A) を満たすような実数 C は存在しないことを示せ。

(A) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で定義されたどのような連続関数 $f(x)$ に対しても、不等式

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq C \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^x f(t) dt \right|$$

が成立する。

n を 3 以上の整数とし、 k を自然数とする。表裏の区別のつく n 枚のコインを用いて 1 人で以下のゲームを行う。

- まず、ゲームの初期状態として、 n 枚のコインを円周上に等間隔に並べる。各コインは表または裏である。
- 以下の操作を何回か繰り返す。(操作) 並べたコインの中から連続する k 枚を選び、選んだコインをすべてひっくり返す。
- この操作を何回か行った結果、すべてのコインを表にすることができれば、ゲームは終了する。

ゲームの初期状態の例

以下の設問に答えよ。

(1) $n = 7, k = 3$ とする。初期状態が図 1 のとき、このゲームを終了させることができることを示せ。また、すべてのコインを表にするまでに必要な操作の最小回数を求めよ。

(2) $n = 6, k = 3$ とする。初期状態が図 2 のとき、このゲームを終了させることはできないことを示せ。

(3) どのような初期状態であっても必ずこのゲームを終了させることができるための、 n, k に関する必要十分条件を求めよ。

4

(20 点)

以下の条件をすべて満たす数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ は存在するか。

(条件 1) すべての自然数 n に対して、 x_n および y_n は自然数である。

(条件 2) すべての自然数 n, m に対して、不等式

$$|n - m| \leq 100|x_n - x_m| + 100|y_n - y_m| + 100$$

が成立する。

(条件 3) どのような自然数 a, b に対しても、自然数 n を適切に選べば不等式

$$|a - x_n| + |b - y_n| \leq 100$$

が成立する。

問題は、このページで終わりである。