1

(30 点)

w を 0 でない複素数，x, y を $w + \dfrac{1}{w} = x + yi$ を満たす実数とする．

(1) 実数 R は $R > 1$ を満たす定数とする．w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ．

(2) 実数 α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ．

2

(30 点)

四面体 $OABC$ を考える．点 D, E, F, G, H, I は，それぞれ辺 OA, AB, BC, CO, OB, AC 上にあり，頂点ではないとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) DG と EF が平行ならば $AE : EB = CF : FB$ であることを示せ．

(2) D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点となっているとき，これらの点は $OABC$ の各辺の中点であり，$OABC$ は正四面体であることを示せ．

3

(35 点)

p, q を自然数，α, β を

$$\tan\alpha = \frac{1}{p}, \quad \tan\beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき

$$\tan(\alpha + 2\beta) = 2$$

を満たす p, q の組 (p, q) をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$

(35 点)

△ ABC は鋭角三角形であり，∠ A $= \dfrac{\pi}{3}$ であるとする．また△ ABC の外接円の半径は 1 であるとする．

(1) △ ABC の内心を P とするとき，∠ BPC を求めよ．

(2) △ ABC の内接円の半径 r の取りうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$

(35 点)

$a \geqq 0$ とする．$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y = xe^{-x}$，直線 $y = ax$，直線 $x = \sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする．このとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

（ここで「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする.）

$\boxed{\mathbf{6}}$

(35 点)

n を自然数とする．n 個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている．各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る．このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ．

問題は，このページで終わりである。