$\boxed{\mathbf{1}}$

(20 点)

r を $0 < r \leqq \dfrac{1}{2}$ を満たす有理数とする．xy 平面上の点列 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ を

$$\overrightarrow{OP_1} = (1, 0)$$

$$\overrightarrow{OP_2} = (0, 1)$$

$$\overrightarrow{OP_{n+2}} = \{2\cos(\pi r)\}\overrightarrow{OP_{n+1}} - \overrightarrow{OP_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．以下の条件（A）を満たすような r をすべて求めよ．

(A) すべての自然数 n について、$\left|\overrightarrow{OP_n}\right| \geqq 1$ が成立する．

$\boxed{\mathbf{2}}$

(20 点)

n を自然数とする．実数 a_n を

$$a_n = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

で定める．

以下の設問に答えよ．

(1) a_1 と a_2 を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対し、a_n は正の有理数であることを示せ．さらに、a_n を互いに素な自然数 b_n と c_n を用いて $a_n = \dfrac{c_n}{b_n}$ と表すとき、b_n は奇数であることを示せ．

3

(20 点)

A, B の 2 人が次のゲームを行う．初期状態として、台の上に n 個の石が置いてある．

最初に A, 次に B の順で交互に、台から 1 個以上の石を取り除いていく．ただし一度に取り除く個数は自然数の 2 乗でなければならない．台の上に石がない状態にした方を勝者として、そこでゲームを終了する．

このゲームが先手必勝であるとは、A が自分の番で取り除く石の個数を適切に選択していけば、B がいかなる選択を行っても、必ず A が勝利できることとする．同様に、このゲームが後手必勝であるとは、B が自分の番で適切に選択を行っていけば、A がいかなる選択を行っても必ず B が勝利できることとする．

例えば、$n = 10$ のとき、最初に A が取り除ける石の個数は 1, 4, 9 のいずれかである．

・ A が 1 個取り除くならば、残りの石の個数は 9 となる．この状態において B が取り除ける石の個数は 1, 4, 9 のいずれかである．B が 9 個取り除くという選択を行うと B が勝利する．

・ A が 9 個取り除くならば、残りの石の個数は 1 となる．次に B が 1 個取り除いて B が勝利する．

・A が 4 個取り除くならば、残りの石の個数は 6 となる．この状態において B が取り除ける石の個数は 1, 4 のいずれかである．B が 4 個取り除くという選択を行うと、残りの石の個数は 2 となる．この状態において A が取り除ける石の個数は 1 のみであり、その次に B が 1 個取り除いて B が勝利する．

したがって、B が自分の番で取り除く石の個数を適切に選択していけば、必ず B が勝利できるので、$n = 10$ のときのゲームは後手必勝である．

以下の設問に答えよ．

(1) どの自然数 n に対しても、このゲームは先手必勝または後手必勝のいずれか一方であることを示せ．

(2) $n = 456$ のとき、このゲームは先手必勝であることを示せ．

(3) このゲームが後手必勝となる n は無限に多く存在することを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$

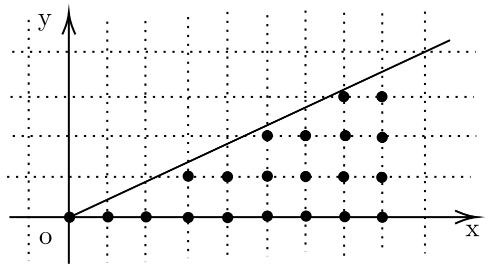
(20 点)

xy 平面上の格子点とは、その点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことをいう。n を 2 以上の整数とする。xy 平面上で不等式

$$0 \leqq x \leqq n-1, \quad 0 \leqq y, \quad \sqrt{5}y \leqq x$$

で表される領域を D_n とする。D_n に属する格子点の個数を S_n とおく。

例えば、$n=5$ のときは、領域 D_5 に属する格子点は $(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),(3,1),(4,1)$ の 7 個であるから、$S_5=7$ となる。また、$n=9$ のときは、以下の図のように領域 D_9 に属する格子点は全部で 21 個あるから、$S_9=21$ である。



以下の設問に答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\sqrt{5}}{10}$ を示せ。

(2) 以下の条件 (H) を満たすような実数 C は存在しないことを示せ。

(H) すべての自然数 n について、$\left|S_n-\dfrac{\sqrt{5}n^2}{10}\right|<C$ が成立する。

問題は，このページで終わりである．